第180回読書会レジメ

2012.1.28

［テキスト: 平野智治(訳)『(ラッセル)数理哲学序説』(岩波文庫, 1954 年 8 月刊)あるいは、
中村秀吉(訳)「(ラッセル)数理哲学入門」(『世界の大思想 v26：ラッセル』(河出書房、1966 年刊)
原著： Introduction to Mathematical Philosophy, May 1919/ second ed. In Apr. 1920］

序文

・本書は初学者向けの**数学的論理学(記号論理学)の入門書**。
（詳細な議論を知りたい場合は、Principia Mathematica, 3 vols., 1910−1913 を参照のこと）

・本書の各章でのべられたものの多くは以前哲学のなかで扱われていたものである。本来、それらは哲学のなかにいれられるべきものではなかった。(例：無限や連続の問題)

・**厳密な意味での「数理哲学」**は、今なお確実性をうることができずに我々の知識の境界近くに横たわっている問題を取り扱うものである。

・**しかしそのような問題の思索も、数学的原理の科学的部分に関する知識がなければほとんど効果がない。**・・・。従って、そのような問題(数学的原理の科学的部分に関する知識)を扱った本も、「数理哲学」の入門書と考えてよいだろう。

・しかもそのような著作の多くは、・・・、多くの伝統的な哲学や、現在流行している哲学のいろいろな部分さえも無価値のように思わせる知識体系を取り扱っている。　↓
従って非常に重要である。

・**さらに研究を進めるためには、研究の「結果」よりも研究の「方法」を知ることが重要であるが、**本書の性格からして、十分に説明できていないことをおことわりしておく。

第1章　自然数列

数学の研究方法

A.簡単なものから複雑なものへ進む （通常の数学の研究）

（数の範囲）　整数 → 分数 → （無理数） → 実数 → 複素数

（計　算）　加算、掛け算(乗算)、割り算 → 微積分 → ・・・

B. 分析によって具体的なものから抽象的なもの、論理的なものに進む （数理哲学）
（より一般的、基本的な概念や原理を追求する。）

・普通の数学と数理哲学とが区別されるのは、研究対象となる命題それ自身にあるのではなく、**その時までに到達している研究の段階**に関係している。

自然数列(数学の出発点)： 0, 1 ,2 ,3, 4, 5,・・・n, n+1,・・・

・(「雉のひとつがい」と「日の二日」とが、ともに「数2の例」であることを発見するまでには永い歳月がかかったであろう。／インド人による「0」の発見も同様。

・**自然数**は卑近なものであるが・・・、数や0や1の概念の「定義」を知っている者はごく僅か(＝1910 年代のこと)。

・ある言葉の定義は、他の言葉で表現されるべきであるため、人間の理性は、「**定義の出発点**」に定義なしで「分かる」若干の言葉のあることを認めなければならない。

・解析幾何学を含めたすべての伝統的な純粋数学は**自然数論**に還元される。（即ち、純粋論理学の概念とその命題を除けば、それら数学の中の概念は、みな自然数に関する概念で定義され、それらの命題は自然数の性質から演繹される。）

・伝統的な純粋数学を自然数論に還元することに成功した後、さらに進むべき論理的分析の道は**自然数論それ自身を<u>最小限度の</u>定義されない言葉と、<u>最小限度の</u>証明されない命題とに還元すること**であった。（ペアノは、3つの基本概念と5つの基本命題から、単に純粋論理の助けだけで、自然数論全体が誘導されることを示した。）

■ペアノによる数学の算術化

○ペアノの3つの基本概念：　零、数、後者

数：　自然数の集合

○ペアノの5つの基本命題

（1）0はひとつの数である。

（2）任意の数の後者はまた一つの数である。

（3）二つの数は同じ後者をもたない。

（4）0はどの数の後者ではない。

（5）ある性質が0について成り立ち、またその性質を持つ任意の数の後者についても成り立つならば、その性質はすべての数について成り立つ。　→　「数学的」帰納法の原理

■フレーゲによる数学の論理化

ペアノは数学の算術に決定的な解決を与えた。しかし、なぜペアノの仕事が最後的なものでなかったか？

理由1　ペアノがあげた<u>3つの基本概念は無限に多くの意味に解釈され</u>、しかもいずれの意味のものでも、ペアノの5つの基本命題を満足することがわかった。

例1：　0が 100 を表し、自然数列のうちで 100 以後に現れるものだけを数としても OK。

例2：　0 には通常の意味を与え、通常偶数と呼ぶものだけを数とし、ある数の後者とはその数に2を加えたものを意味するとしても OK。

例3：　任意の数列はみな純粋数学の基本概念としてとることができるから、その初項を「0」、数列の全体の項を「数」、その中のある項の次の項を「後者」と名付けることができる。

（数列：　初項があり、各項には必ず後者があり（従って末項がなく）、重複がなく、かつ、各項目には初項から出発して有限回の段階で到達することのできる系列）

理由2　「ペアノの体系」のなかだけでは、基本概念の種々の解釈を区別することができない。

（数は、日常の物にも使いうるようなものであって欲しいが、ペアノの方法では数がそのような要求にそうように使われているかどうか明らかでない。）

数は形式的な性質を満足するだけでなく、それは一定の意味をもっていなければならない。この一定の意味こそ、算術の論理的基礎づけによって初めて与えられるものである。

第2章　数とは何か

□「数とは何であるか」、（古代より）疑問が繰り返されてきた。

・フレーゲによって初めて**数の正しい定義**が与えられた。（Grundlagen der Arithmetik, 1884.）
しかし、ラッセルが 1901 年に発見するまで埋もれていた。

□**数の定義を求めるときに第一に注意すべきこと**は、定義すべき事柄の内容を明らかにすることである。　　↓

・ある物の(具体的な)「数」は「数（一般）」の一例ではなく、ある特別な「数」の例である。

（例：三人は数3の一つの例、数3は数（一般）のひとつの例であって、三人が「数（一般）」のひとつの例ではない。）

・ひとつの特別な数は、物のある集まり（集合）、即ちその数だけの個数の物の集まり（集合）に共通な特性である。（例えば、「数3」は全ての三つの物の集まり（集合）に共通なあるものの従って、それが三つの物の集まりをそうでない種類の集まりから区別する、特性である。）

■**集合に関する2，3の注意点**（集合に関する詳細は後の章でとりあげる。）

(1) **集合の定義の方法**

1)各要素を全て数え上げる方法 （**外延的定義**）

2)(定義すべき対象の）性質をのべる方法 （**内包的定義**）

（例：人類、ロンドンの住民、・・・）

・論理的には、内包的定義の方がより基本的なものであり、外延的定義は内包的定義に還元できる。（内包的定義は、理論的に考えただけでも、外延的定義に還元できない場合がある。）

・我々は要素を数えあげることができない集合についても色々なことを知っていることがある。（人類やロンドン市民について全員について知らなくても、我々はいろいろなことを知っている。）

以上の注意は、数の定義に対して、以下の3つの観点から重要。

① 数全体は無限集合を作るため、その定義を数え上げることによって行うことはできない。

② 与えられた個数の要素を持つ集合はおそらく無限にあるだろう。（例えば、世の中にある三つの物の集合は無数に多くあるだろう。）

③ 無限数も数の一つであるように「数」の定義をしたい。

■数は、ある種の集合、即ち、与えられた個数の要素をもつ全ての集合を一つに纏めるための手段である。

・2つの要素からなる集合

・3つの要素からなる集合

・・・

・n 個の要素からなる集合

それぞれが、集合の集合　→　これらの束は無限集合

■二つの集合が同じ束に属するかどうかの判定方法

・まず、各々の集合がいくつの要素を含むか判定し、それらが同じ個数の要素を含めば、それらを同一の束に入れる。

→ この解答には既に数の定義と、集合の要素の数を知る方法とが仮定されている。

・定義のなかに「数える」ということを使ってはいけない。（×循環論法）。また、数の定義には、初めから、全ての数は有限であるなどの仮定をしてはならない。

■別の方法で定義をする必要がある。

・一対一 の関係 ｜
・一対多 の関係 ｜―― これらの定義には「数」の概念が使われていないことに注意！
・多対多 の関係 ｜

■相似の概念の定義

・領域、逆領域

・(1)集合はみなそれ自身に掃除であり、(2)集合αが集合βに相似であれば、βはαに相似であり、(3)αがβに相似であれば、αはγに相似である。α、β、γの3つの集合の関係は、(1)の場合は「反射的」、(2)の場合は「対照的」、(3)の場合は「移行的」だる。

・あらゆる関係のなかで、この3つの性質をもっているものは数学では特に重要なものであり、相似の関係もその一つである。2つの有限集合が同数の要素をもつのは、それらが相似する時でしかもその時に限ることは明らかである。

・相似の概念は順序の概念を前提としていない。また、相似の概念は、関係する集合が有限であることを要求していない。

・まったく要素を含まない集合の束 → 空集合 → 「数 0」の定義
・一つの要素しかもたない集合の束 → 「数１」の定義
・すべてのペアの束 → 「数２」の定義
・・・ 以下同様

・ある集合の数とは、その集合に相似なすべての集合の集合である。さらに進んで、相似性によってひとつにまとめられたある束を、一般に数として定義することができる。
・数とはある集合の数である。

以上のような数の定義は、有限集合に対してあてはまる。

これが無限集合に適用できることを証明するには、有限や無限という言葉が何を意味するあｋを明らかにしなければならない。